

**Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**  
**Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
  - as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
  - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

## Formulário

---

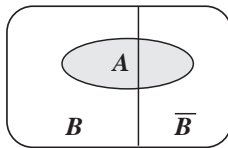
### Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

### Modelos de probabilidade

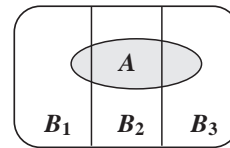
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})\end{aligned}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)\end{aligned}$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

### Modelo normal

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> – média amostral  <math>\sigma</math> – desvio padrão da variável  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável aleatória  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> – média amostral  <math>s</math> – desvio padrão amostral  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\hat{p}</math> – proporção amostral  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

1. A ParaPagarApp é uma aplicação para telemóveis detida pela empresa ParaPagar. Depois de instalada, esta aplicação permite efetuar pagamentos em estabelecimentos aderentes recorrendo à Internet móvel.

Em 2020, foi necessário eleger uma nova equipa diretiva da ParaPagar. Nessa eleição, cada acionista da empresa teve de votar numa de quatro listas que se apresentaram a votação: listas A, B, C e D.

Apurados os resultados, verificou-se que o número de votos validamente expressos foi 7200.

\* 1.1. Os votos validamente expressos representaram 96% dos votos apurados e a abstenção foi de 20%. Qual é o número de acionistas da empresa que poderiam ter votado no momento deste ato eleitoral?

(A) 7500

(B) 9000

(C) 9375

(D) 37 500

1.2. Na Tabela 1, apresenta-se o número de votos validamente expressos em cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	A	B	C	D
Votos	1505	2295	1750	1650

A nova equipa diretiva, constituída por 24 elementos, resultou da aplicação do método seguinte.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos validamente expressos pelo número de elementos da equipa diretiva.

2.º passo: Calcula-se a quota inferior de cada lista, arredondando, por defeito, às unidades o resultado da divisão entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

3.º passo: Se a soma das quotas inferiores das quatro listas for igual ao número de elementos da equipa diretiva, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de elementos de cada lista é igual ao valor da quota inferior. Caso contrário, é necessário encontrar um divisor modificado.

- Se a soma das quotas inferiores for inferior ao número de elementos da equipa diretiva, subtrai-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.
- Se a soma das quotas inferiores for superior ao número de elementos da equipa diretiva, soma-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

O divisor modificado irá substituir o divisor padrão, de modo a calcular a quota inferior modificada de cada lista.

4.º passo: Repetem-se os 2.º e 3.º passos até se obter uma soma das quotas inferiores modificadas que seja igual ao número de elementos da equipa diretiva, atribuindo-se a cada lista o número de elementos igual à respetiva quota inferior modificada.

Determine o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da ParaPagar, recorrendo ao método descrito.

\* 2. Para distinguir os três trabalhadores com melhores resultados operacionais, a administração da ParaPagar atribuiu como prémio de produtividade três telemóveis de modelos diferentes.

Como os três trabalhadores não chegaram a acordo quanto à distribuição dos telemóveis, decidiram que iriam distribuí-los entre si utilizando o método seguinte.

- Cada trabalhador atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três telemóveis e introduz o registo dessas licitações num envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada trabalhador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu ao conjunto dos três telemóveis.
- Cada telemóvel é entregue ao trabalhador que mais o valoriza, considerando-se que o trabalhador recebe o valor monetário que lhe atribuiu.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um trabalhador não receba qualquer telemóvel, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse trabalhador é zero euros.
- Caso o valor dos telemóveis recebidos por um trabalhador ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, o trabalhador disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o trabalhador recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três trabalhadores.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada trabalhador nas licitações secretas.

Tabela 2

<b>Telemóveis</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>Trabalhadores</b>			
Mariana	370	480	230
Pedro	330	500	205
Tiago	290	480	190

Determine, de acordo com o método acima descrito, como serão distribuídos os telemóveis pelos trabalhadores e o valor monetário a pagar ou a receber após a inclusão do dinheiro que possa ter sido distribuído, para que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. A ParaPagar pretende renovar a rede de cabo de fibra ótica em algumas das ligações existentes entre seis postos de comunicação,  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$ ,  $P4$ ,  $P5$  e  $P6$ .

Na Figura 1, apresenta-se um esquema simplificado dessas ligações, no qual se indica, junto de cada segmento de reta, o comprimento, em quilómetros, de cada ligação.

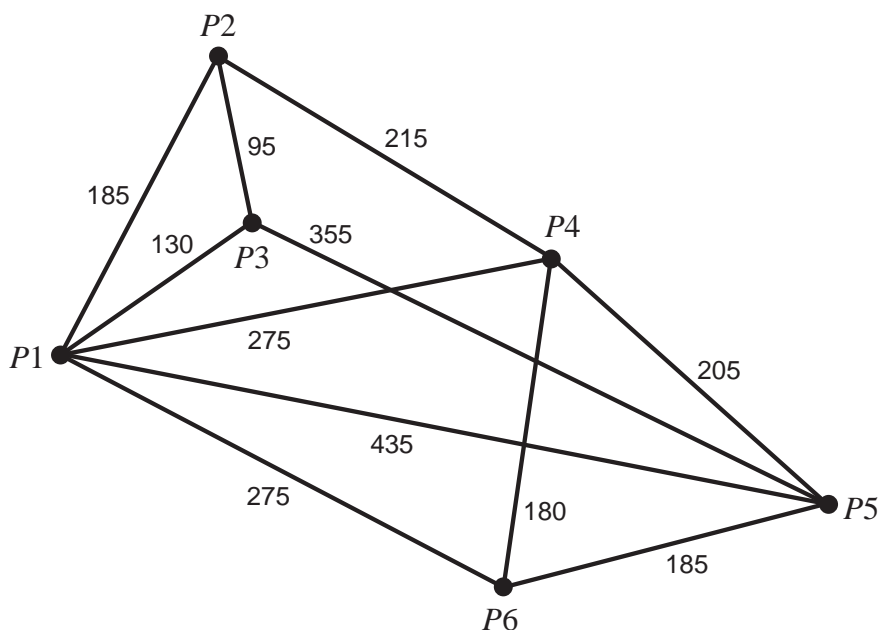


Figura 1

Com vista à minimização de custos, optou-se por começar a renovação no posto de comunicação  $P4$  e aplicar o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se o posto seguinte, tendo em conta que:
  - deverá corresponder ao posto mais próximo;
  - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, partindo do último posto selecionado, não se repetindo nenhum e terminando depois de todos os postos serem incluídos.

Determine a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar.

Na sua resposta, apresente um grafo que resulte do método descrito e que permita identificar as ligações a renovar.

4. A ParaPagar tem 150 funcionários na região de Lisboa e Vale do Tejo cujas idades se apresentam no histograma de frequências absolutas acumuladas, representado na Figura 2, organizadas nas classes  $[18, 28[$ ,  $[28, 38[$ , ... ,  $[58, 68[$ .

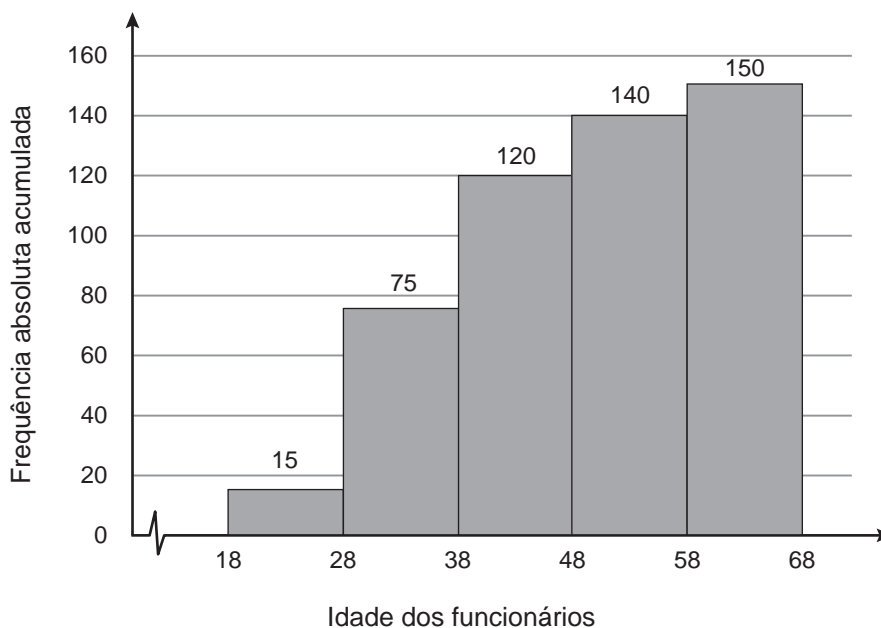


Figura 2

- 4.1. Determine, recorrendo ao histograma da Figura 2, a média das idades dos 150 funcionários.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

- \* 4.2. Considere que, com os dados apresentados no histograma da Figura 2, será construído um gráfico circular, em que a cada sector corresponde o número de funcionários da região de Lisboa e Vale do Tejo, de acordo com as suas idades.

A amplitude do ângulo ao centro, em graus, correspondente ao sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe  $[18, 28[$  será

- (A)  $15^\circ$                       (B)  $18^\circ$                       (C)  $33^\circ$                       (D)  $36^\circ$

- 4.3. Na Tabela 3, apresentam-se, organizadas por classes, as idades dos 100 funcionários da ParaPagar da região do Algarve.

Tabela 3

Idade	$[18, 28[$	$[28, 38[$	$[38, 48[$	$[48, 58[$	$[58, 68[$
N.º de funcionários	30	25	30	10	5

Apresente uma tabela de frequências relativas acumuladas para as idades dos 250 funcionários da ParaPagar, 150 da região de Lisboa e Vale do Tejo e 100 da região do Algarve.

Na sua resposta, mantenha as classes utilizadas.

- \* 5. Ao fazer pagamentos recorrendo à ParaPagarApp, o utilizador pode optar por fracionar o pagamento de 2 até 12 prestações mensais.

O valor da prestação mensal  $P$ , em euros, é dado pelo arredondamento às unidades do valor obtido pela expressão

$$P = \frac{VF \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

em que

$VF$  é o valor financiado, em euros;

$i$  é a taxa de juro mensal, na forma de dízima;

$n$  é o número de prestações mensais.

Para comprar um telemóvel, o Tiago solicitou um financiamento de 500 euros e decidiu pagá-lo de forma fracionada, recorrendo à ParaPagarApp.

Admita que a taxa de juro mensal é 3% e que o Tiago pode pagar, no máximo, 75 euros em cada prestação mensal.

Uma vez que, quanto maior for o número de prestações mensais, maior é o valor total final a pagar, o Tiago fez cálculos para decidir em quantas prestações mensais faria o pagamento, de modo a ser mais vantajoso.

Determine o valor total pago pelo Tiago, depois de pagar todas as prestações.

Na sua resposta, apresente:

- a expressão de  $P$  no contexto da situação descrita;
- uma tabela que permita obter o solicitado;
- o número de prestações mensais pagas pelo Tiago.



6. Admita que, no início do ano de 2016, a ParaPagarApp tinha, em Portugal continental, 50 000 utilizadores.

O número de utilizadores, em milhares, que,  $t$  anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + e^{-0,2t}}$$

\* 6.1. Determine a percentagem de utilizadores da aplicação ParaPagarApp em Portugal continental que não pertenciam à região do Alentejo no início do ano de 2016.

6.2. Numa perspetiva de longo prazo, estima-se que, com o passar dos anos, o número de utilizadores da ParaPagarApp, em Portugal continental, seja 200 000.

Na Figura 3, apresenta-se um mapa de Portugal continental e, parcialmente, a estimativa da percentagem de utilizadores da ParaPagarApp, por regiões, numa perspetiva de longo prazo.

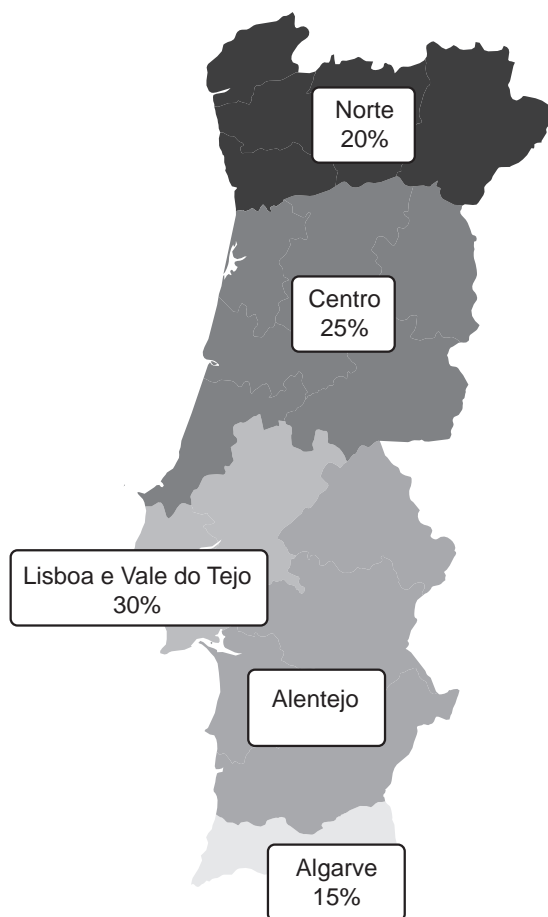


Figura 3

Atendendo aos dados apresentados na Figura 3, averigue se o modelo apresentado para o Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental. Justifique a sua resposta.

\* 7. A ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015.

Num relatório técnico, verifica-se que a percentagem,  $D$ , de novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação,  $t$  anos após o seu lançamento, é bem aproximada pelo modelo cujo gráfico se apresenta na Figura 4.

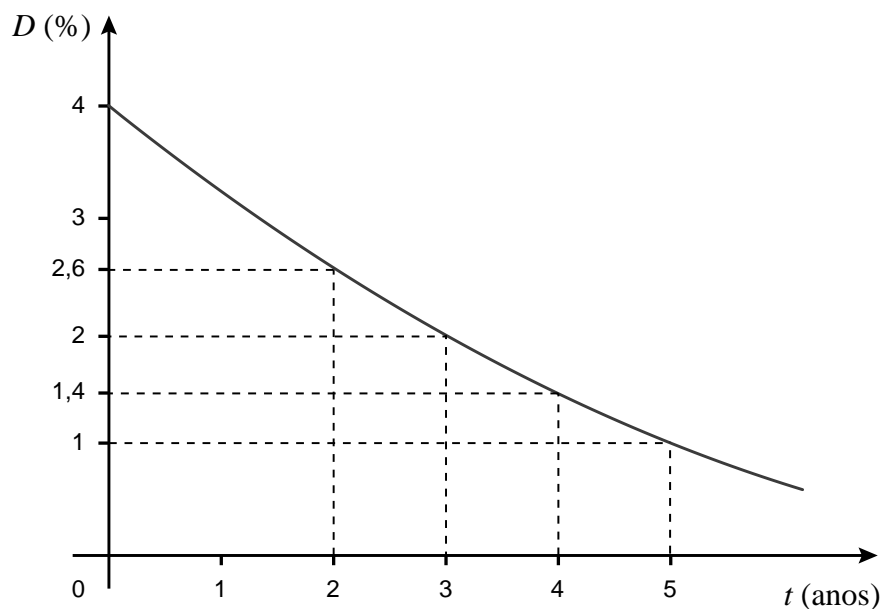


Figura 4

Realizou-se um estudo sobre os novos utilizadores da ParaPagarApp no início do ano de 2018 e concluiu-se que:

- 40% dos novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento;
- 90% dos novos utilizadores que não tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento.

Escolheu-se ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018.

Com base no estudo realizado e de acordo com o modelo apresentado na Figura 4, determine a probabilidade de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- \* 8. Por razões de segurança, sempre que se pretende efetuar um pagamento com a ParaPagarApp, é necessário escrever uma palavra-passe anteriormente escolhida pelo utilizador.

O Tiago é um utilizador da ParaPagarApp. Tendo nascido no dia 8 de maio (mês 5) de 2001, escolheu as letras T e G e os algarismos 8, 5 e 1 para a construção da sua palavra-passe.

Certo dia, o Tiago não se recordava exatamente de qual seria a palavra-passe que escolhera, embora soubesse que:

- os algarismos estavam dispostos consecutivamente, formando o número 851;
- as letras utilizadas eram T e G, escritas por uma qualquer ordem.

Atendendo ao que sabia, o Tiago escreveu uma possível palavra-passe.

A probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é igual a

- (A)  $\frac{1}{6}$                       (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $\frac{2}{3}$

- \* 9. Por vezes, por esquecimento da palavra-passe ou por erros ocasionais na sua escrita, um utilizador escreve a palavra-passe incorretamente.

Admita que, em 10% das situações, os utilizadores cometem erros na escrita da palavra-passe.

Determine a probabilidade de, selecionando três utilizadores ao acaso, apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- \* 10. Inquiriram-se 625 utilizadores da ParaPagarApp relativamente ao valor pago na última compra em que usaram a aplicação.

Na Tabela 4, apresentam-se os dados recolhidos.

Tabela 4

Valor pago, em euros	]0, 20]	]20, 40]	]40, 60]	]60, 80]	]80, 100]
N.º de utilizadores	308	81	44	128	64

Recorrendo aos dados da tabela anterior, construa um intervalo de confiança a 90% para a proporção de utilizadores da ParaPagarApp que, na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros.

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	2.	4.2.	5.	6.1.	7.	8.	9.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	12	18	18	18	12	18	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.2.	3.	4.1.	4.3.	6.2.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					54				
<b>TOTAL</b>										<b>200</b>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

# **Prova 835**

1.<sup>a</sup> Fase



## **Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

**Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021**

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

**Critérios de Classificação**

8 Páginas

### **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

#### **ITENS DE SELEÇÃO**

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

#### **ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).

8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.  As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

- 1.1. .... 12 pontos
- (C)
- 1.2. .... 18 pontos
- Calcular o divisor padrão (300) ..... 2 pontos
- Calcular as quotas inferiores de cada lista (5; 7; 5; 5) ..... (1 + 1 + 1 + 1)..... 4 pontos
- Mostrar que, utilizando o divisor padrão, o número de elementos é inferior ao solicitado (22) ..... 2 pontos
- Indicar o divisor modificado (280) ..... 4 pontos
- Calcular as quotas inferiores modificadas de cada lista (5; 8; 6; 5) ..... (1 + 1 + 1 + 1)..... 4 pontos
- Indicar a distribuição dos elementos ..... 2 pontos  
[Lista A – 5 elementos; Lista B – 8 elementos; Lista C – 6 elementos; Lista D – 5 elementos]
2. .... 20 pontos
- Determinar o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador (1080 €, 1035 €, 960 €) ..... (1 + 1 + 1)..... 3 pontos
- Determinar o valor justo a receber por cada trabalhador (360 €, 345 €, 320 €) ..... (1 + 1 + 1)..... 3 pontos
- Indicar a distribuição dos telemóveis pelos trabalhadores (Mariana – Telemóveis A e C; Pedro – Telemóvel B) ..... 2 pontos
- Determinar o valor a pagar ou a receber por cada trabalhador (Mariana – paga 240 €; Pedro – paga 155 €; Tiago recebe 320 €) ..... 4 pontos
- Determinar o valor monetário a distribuir pelos trabalhadores (25 €) ..... 4 pontos
- Indicar a distribuição final dos telemóveis pelos trabalhadores e o valor a pagar ou a receber ..... 4 pontos  
[Mariana – recebe os telemóveis A e C e paga 215 euros; Pedro – recebe o telemóvel B e paga 130 euros; Tiago – recebe 345 euros]
3. .... 18 pontos
- Apresentar um grafo que resulta do método descrito ..... 12 pontos
- Associar os vértices aos postos de comunicação ..... 2 pontos
- Associar as arestas às ligações entre postos ..... 10 pontos
- Apresentar a quantidade mínima de cabo de fibra ótica a renovar (1000 km) ... 6 pontos

4.1. ....	18 pontos
Identificar a marca de cada classe (23, 33, 43, 53, 63) .....	3 pontos
Determinar a frequência absoluta simples de cada classe (15, 60, 45, 20, 10) .....	10 pontos
Obter o valor solicitado (40) .....	5 pontos
4.2. ....	12 pontos
(D)	
4.3. ....	18 pontos
Determinar a frequência absoluta acumulada para a região do Algarve (30, 55, 85, 95, 100) .....	5 pontos
Determinar a frequência acumulada dos 250 funcionários (45, 130, 205, 235, 250) .....	5 pontos
Determinar as frequências relativas acumuladas dos 250 funcionários (0,18; 0,52; 0,82; 0,94; 1) (ou equivalente) .....	5 pontos
Apresentar a tabela de frequências relativas acumuladas .....	3 pontos
5. ....	18 pontos
Identificar os valores de $VF$ e $i$ (500; 0,03) .....(1 + 2).....	3 pontos
Escrever $P = \frac{500 \times 0,03 \times (1,03)^n}{(1,03)^n - 1}$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Apresentar as linhas relevantes da tabela utilizada .....	6 pontos
Obter o valor de $n$ (8) .....	3 pontos
Determinar o valor total a pagar pelo telemóvel (568 euros) .....	4 pontos
6.1. ....	18 pontos
Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.	
<b>1.º Processo</b>	
Identificar $t = 0$ .....	2 pontos
Calcular $A(0)$ (10) .....	3 pontos
Reconhecer o número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 (10 000) .....	3 pontos
Determinar o número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que não pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 (40 000) .....	3 pontos
Determinar o valor solicitado (80%) .....	7 pontos

## 2.º Processo

Identificar $t = 0$ .....	2 pontos
Calcular $A(0)$ (10) .....	3 pontos
Reconhecer o número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 (10 000) .....	3 pontos
Determinar a percentagem do número de utilizadores da ParaPagarApp em Portugal Continental que pertenciam à região do Alentejo no início do ano 2016 (20%) .....	7 pontos
Determinar o valor solicitado (80%) .....	3 pontos

## 6.2. .... 18 pontos

Determinar a percentagem de utilizadores da região do Alentejo que se prevê que a ParaPagarApp atingirá, atendendo à informação apresentada na Figura 3 (10%) .....	4 pontos
Determinar o número de utilizadores da ParaPagarApp estimado para a região do Alentejo a longo prazo (20 000) .....	6 pontos
Identificar o valor máximo de utilizadores da ParaPagarApp que se estima para a região do Alentejo, a partir do modelo (20 000) .....	6 pontos
Concluir .....	2 pontos
[O modelo que se ajusta ao Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental.]	

## 7. .... 18 pontos

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$D$ : «Novo utilizador que teve dificuldade na instalação da ParaPagarApp»

$F$ : «Novo utilizador que considera a aplicação de fácil manuseamento»

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Calcular $P(D)$ .....	4 pontos
Identificar $t = 3$ .....	2 pontos
Obter $P(D)$ (0,02) .....	2 pontos
Calcular $P(D \cap \bar{F})$ .....	5 pontos
Escrever $P(F D) = 0,4$ .....	1 ponto
Obter $P(\bar{F} D)$ (0,6) .....	2 pontos
Obter $P(D \cap \bar{F})$ (0,012) .....	2 pontos
Calcular $P(\bar{D} \cap \bar{F})$ .....	7 pontos
Calcular $P(\bar{D})$ (0,98) .....	2 pontos
Escrever $P(F \bar{D}) = 0,9$ .....	1 ponto
Obter $P(\bar{F} \bar{D})$ (0,1) .....	2 pontos
Obter $P(\bar{D} \cap \bar{F})$ (0,098) .....	2 pontos
Determinar $P(\bar{F})$ (0,11) .....	2 pontos

**2.º Processo**

- Calcular  $P(D)$  ..... 4 pontos
- Identificar  $t = 3$  ..... 2 pontos
- Obter  $P(D)$  (0,02) ..... 2 pontos
- Calcular  $P(D \cap F)$  ..... 3 pontos
- Escrever  $P(F|D) = 0,4$  ..... 1 ponto
- Obter  $P(D \cap F)$  (0,008) ..... 2 pontos
- Calcular  $P(\bar{D} \cap F)$  ..... 5 pontos
- Calcular  $P(\bar{D})$  (0,98) ..... 2 pontos
- Escrever  $P(F|\bar{D}) = 0,9$  ..... 1 ponto
- Obter  $P(\bar{D} \cap F)$  (0,882) ..... 2 pontos
- Calcular  $P(F)$  (0,89) ..... 2 pontos
- Determinar  $P(\bar{F})$  (0,11) ..... 4 pontos

8. .... 12 pontos

(A)

9. .... 18 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Considere-se o seguinte acontecimento:

$E$ : «Escrever palavra-passe errada»

- Escrever  $P(E) = 0,1$  ..... 1 ponto
- Calcular  $P(\bar{E})$  (0,9) ..... 3 pontos
- Escrever  $0,1^2 \times 0,9 \times 3$  (ou equivalente) ..... (4 + 3 + 5) ..... 12 pontos
- Obter o valor solicitado (0,027) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Resposta obtida com recurso às potencialidades da calculadora, utilizando o modelo binomial.

- Identificar o número de provas (3) ..... 5 pontos
- Identificar o número de sucessos (2) ..... 7 pontos
- Identificar a probabilidade de sucesso (0,1) ..... 4 pontos
- Obter o valor solicitado (0,027) ..... 2 pontos

10. .... 18 pontos

Identificar os valores de  $n$  e  $z$  para um intervalo de confiança a 90% ..... 2 pontos

$n = 625$  ..... 1 ponto

$z = 1,645$  ..... 1 ponto

Determinar o valor de  $\hat{p}$  (0,2) ..... 6 pontos

Obter o intervalo solicitado ]0,17; 0,23[ ..... 10 pontos

### COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	2.	4.2.	5.	6.1.	7.	8.	9.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	12	18	18	18	12	18	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.2.	3.	4.1.	4.3.	6.2.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									54
<b>TOTAL</b>										<b>200</b>