

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

7 Páginas

---

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.1.**, **1.2.**, **9.1.** e **9.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[ABCDEFGH]$  (o ponto  $H$  não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(7, 1, 4)$
- o ponto  $G$  tem coordenadas  $(5, 3, 6)$
- a reta  $AE$  é definida pela equação vetorial  $(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2), k \in \mathbb{R}$

Resolva os itens 1.1. e 1.2. sem recorrer à calculadora.

1.1. Determine uma equação do plano  $EFG$

Apresente essa equação na forma  $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

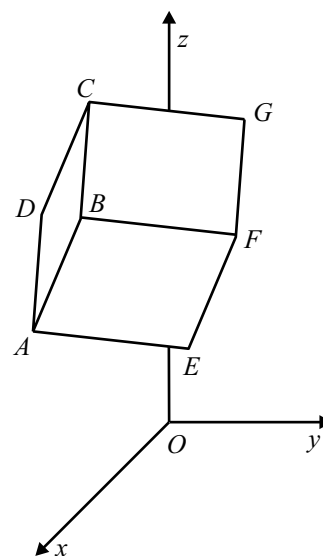


Figura 1

2. Considere um cubo  $[MNPQRSTU]$

Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos desse cubo.

Qual é a probabilidade de o plano por eles definido conter uma das faces do cubo?

- (A)  $\frac{1}{7}$                       (B)  $\frac{3}{7}$                       (C)  $\frac{1}{8}$                       (D)  $\frac{3}{8}$

3. Seja  $E$  o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset E$  e  $B \subset E$ ).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,3$  ;  $P(B) = 0,4$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$

Determine o valor da probabilidade condicionada  $P(A|(A \cup B))$

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000

Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?

- (A) 192                      (B) 236                      (C) 384                      (D) 512

5. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a  $\frac{1}{3}$ .  
A que é igual o produto desses dois números?

(A) 2

(B) 3

(C) 8

(D) 9

6. De uma progressão aritmética  $(u_n)$  sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57

Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão  $(u_n)$

Determine a ordem deste termo.

7. Seja  $(v_n)$  a sucessão definida por

$$v_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10 \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão  $(v_n)$  tem limite nulo.

(B) A sucessão  $(v_n)$  é divergente.

(C) A sucessão  $(v_n)$  é limitada.

(D) A sucessão  $(v_n)$  é monótona.

8. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos.

8.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja  $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5}$  e seja  $z_2$  um número complexo tal que  $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de  $z_1 \times z_2$  tem coordenadas positivas e iguais.

Determine  $z_2$

Apresente a resposta na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$

8.2. Seja  $k$  um número real.

Sabe-se que  $k + i$  é uma das raízes quadradas do número complexo  $3 - 4i$

Qual é o valor de  $k$ ?

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

9. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

Nesta figura,

- $R$  é o raio, em quilómetros, da Terra;
- $h$  é a altitude, em quilómetros, do satélite ( $h > 0$ )
- $r$  é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ( $0 < r < R$ )

- as grandezas  $h$  e  $r$  podem relacionar-se por meio da igualdade  $r = \frac{R}{h+R} \sqrt{h^2 + 2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo

satélite é dada por  $50 \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2} \right)$

- 9.1. Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a  $\frac{3}{5}$  do raio da Terra?

- (A) 20%                      (B) 15%                      (C) 10%                      (D) 5%

- 9.2. Considere que o raio da Terra é 6400 km

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

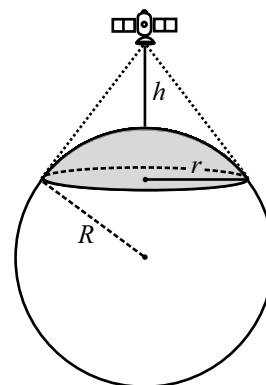


Figura 2

10. Sejam  $f$  e  $g$  as funções, de domínio  $\mathbb{R}$ , definidas, respetivamente, por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \cos x$

10.1. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função  $f \circ g$  no ponto de abcissa  $\frac{\pi}{4}$  ?

(A)  $-2$

(B)  $-1$

(C)  $1$

(D)  $2$

10.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação  $f(x) = g(x)$  tem, pelo menos, uma solução no intervalo  $]0, \frac{\pi}{3}[$

11. Seja  $h$  a função, de domínio  $]-\infty, 4[$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + x e^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{\text{sen}(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Resolva os itens 11.1. e 11.2. sem recorrer à calculadora.

11.1. Averigue se a função  $h$  é contínua em  $x = 1$

11.2. Mostre que o gráfico da função  $h$  tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

12. Seja  $f$  uma função, de domínio  $]0, +\infty[$ , cuja derivada,  $f'$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , é dada por  $f'(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

12.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$

12.2. Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2}$  ?

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 2

**FIM**

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.1.</b>				<b>1.2.</b>				<b>9.1.</b>			<b>9.2.</b>		<b>Subtotal</b>	
Cotação (em pontos)	16				20				16			20		<b>72</b>	
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>2.</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>11.1.</b>	<b>11.2.</b>	<b>12.1.</b>	<b>12.2.</b>	<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														<b>128</b>
<b>TOTAL</b>															<b>200</b>

**Prova 635**

2.<sup>a</sup> Fase



**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020**  
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

**Critérios de Classificação**

9 Páginas

---

**CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

**ITENS DE SELEÇÃO**

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

**ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Identificar o vetor de coordenadas  $(3, -6, 2)$  como um vetor normal ao plano  $EFG$  ..... 3 pontos

Escrever  $3x - 6y + 2z + d = 0$  ..... 5 pontos

Determinar o valor de  $d$  ..... 5 pontos

Escrever uma equação do plano pedido

$(3x - 6y + 2z - 9 = 0$  ou outra equação equivalente, na forma pedida) ..... 3 pontos

### 2.º Processo

Identificar um vetor  $\vec{u}$  normal ao plano  $EFG$  ..... 3 pontos

Escrever  $\overrightarrow{GP} \cdot \vec{u} = 0$ , sendo  $P$  um ponto genérico do plano  $EFG$  ..... 4 pontos

Escrever  $3(x - 5) - 6(y - 3) + 2(z - 6) = 0$  ..... 5 pontos

Obter uma equação do plano pedido

$(3x - 6y + 2z - 9 = 0$  ou outra equação equivalente, na forma pedida) ..... 4 pontos

1.2. .... 20 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Determinar as coordenadas do centro da superfície esférica ..... 7 pontos

Determinar o raio da superfície esférica ..... 7 pontos

Escrever a equação reduzida da superfície esférica

$((x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 3)$  ..... 6 pontos

### 2.º Processo

Escrever  $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ , sendo  $P$  um ponto genérico da superfície esférica ... 5 pontos

Escrever  $(x - 5, y - 3, z - 6) \cdot (x - 7, y - 1, z - 4) = 0$  ..... 5 pontos

Obter  $x^2 - 12x + y^2 - 4y + z^2 - 10z + 62 = 0$  ..... 4 pontos

Obter a equação reduzida da superfície esférica

$((x - 6)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 3)$  ..... 6 pontos

2. .... 16 pontos

Opção (B)

3. .... 16 pontos

Escrever  $P(A|(A \cup B)) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$  ..... 2 pontos

Obter  $P(A \cap (A \cup B)) = P(A)$  ..... 4 pontos

Determinar  $P(A \cap B)$  ..... 5 pontos

Obter  $P(A \cup B)$  ..... 4 pontos

Obter o valor pedido  $\left(\frac{1}{2}\right)$  ..... 1 ponto

4. .... 16 pontos

Opção (C)

5. .... 16 pontos

Opção (A)

6. .... 16 pontos

Escrever  $\begin{cases} u_7 = 2u_2 \\ S_{12} = 57 \end{cases}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\begin{cases} u_1 + 6r = 2(u_1 + r) \\ \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = 57 \end{cases}$

(ou um sistema equivalente, nas variáveis  $u_1$  e  $r$ ) ..... 4 pontos

Obter o valor de  $r$  ..... 3 pontos

Obter o valor de  $u_1$  ..... 3 pontos

Escrever  $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = 500$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter a ordem pedida (997) ..... 2 pontos

7. .... 16 pontos

Opção (C)

8.1. .... 16 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Identificar  $i^5$  com  $i$  ..... 1 ponto

Escrever  $z_1 = \frac{2i + 4(1-i)}{(1-i)i}$  ou  $z_1 = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4(-i)}{i(-i)}$  ..... 2 pontos

Obter  $z_1 = 1 - 3i$  ..... 1 ponto

Obter  $z_1 \times z_2 = a + 3b + i(b - 3a)$ , considerando  $z_2 = a + bi$  ..... 2 pontos

Escrever  $a + 3b = b - 3a$  ..... 1 ponto

Resolver a equação em ordem a  $a$  (ou em ordem a  $b$ ) ..... 1 ponto

Determinar  $|z_2|$ , em função de  $b$  (ou em função de  $a$ ) ..... 2 pontos

Resolver a equação  $|z_2| = \sqrt{5}$  ..... 3 pontos

Concluir que  $z_2 = -1 + 2i$  ..... 3 pontos

**2.º Processo**

Identificar  $i^5$  com  $i$  ..... 1 ponto

Escrever  $z_1 = \frac{2i + 4(1-i)}{(1-i)i}$  ou  $z_1 = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{4(-i)}{i(-i)}$  ..... 2 pontos

Obter  $z_1 = 1 - 3i$  ..... 1 ponto

Calcular  $|z_1|$  ..... 1 ponto

Calcular  $|z_1 \times z_2|$  ..... 3 pontos

Concluir que  $z_1 \times z_2 = 5 + 5i$  ..... 5 pontos

Escrever  $z_2 = \frac{(5 + 5i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)}$  ..... 2 pontos

Obter  $z_2 = (-1 + 2i)$  ..... 1 ponto

8.2. .... 16 pontos

Opção (D)

9.1. .... 16 pontos

Opção (C)

9.2. .... 20 pontos

- Apresentar a equação  $r = \frac{6400}{r + 6400} \sqrt{r^2 + 12800r}$  (ver notas 1 e 2) ..... 6 pontos
- Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (ver nota 3) ..... 5 pontos
- Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) ..... 4 pontos
- Apresentar o valor pedido (23%) ..... 5 pontos

**Notas:**

1. Se a equação apresentada não for equivalente a  $r = \frac{6400}{r + 6400} \sqrt{r^2 + 12800r}$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho evidenciado.
3. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

10.1. .... 16 pontos

Opção (B)

10.2. .... 16 pontos

- Referir que a função  $f - g$  é contínua em  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  ..... 3 pontos
- Calcular  $(f - g)(0)$  ..... 4 pontos
- Calcular  $(f - g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ..... 4 pontos
- Referir que  $(f - g)(0) < 0 < (f - g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ..... 4 pontos
- Concluir o pretendido ..... 1 ponto

11.1. .... 16 pontos

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$  (ou determinar  $h(1)$ ) ..... 3 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + x e^{x-1})$  ..... 1 ponto
- Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 2$  ..... 2 pontos
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$  ..... 12 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\text{sen}(x - 1)}$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\text{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)\text{sen}(x - 1)}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1) \sin(x - 1)} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sin(x - 1)}$  ..... 3 pontos

Escrever  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sin(x - 1)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\sin(x - 1)}{x - 1}}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\sin(x - 1)}{x - 1}} = \frac{1}{2} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}}$  .... 2 pontos

Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{2}$  ..... 1 ponto

Concluir que a função  $h$  não é contínua em  $x = 1$  ..... 1 ponto

**11.2.** ..... **16 pontos**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x e^{x-1})$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x e^{x-1}) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{x-1})$  ..... 1 ponto

Obter  $1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{x-1}) = 1 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$  ..... 5 pontos

Escrever  $1 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 1 - \frac{1}{e} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$  ..... 4 pontos

Escrever  $1 - \frac{1}{e} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = 1 - \frac{1}{e} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}$  ..... 2 pontos

Obter  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  ..... 2 pontos

Concluir que a equação da assíntota horizontal do gráfico da função  $h$  é  $y = 1$  ..... 1 ponto



**12.1.** ..... **16 pontos**

- Determinar  $f''(x)$  (ver nota 1) ..... 3 pontos
- Determinar o zero de  $f''$  ..... 5 pontos
- Escrever  $f''(x) = 0$  ..... 1 ponto
- Obter o zero de  $f''$  ..... 4 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de  $f''$  e de sentido da concavidade do gráfico de  $f$  (ou equivalente) ..... 5 pontos
- Referir que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $\left]0, \frac{1}{e}\right]$  (ver nota 2) ..... 1 ponto
- Referir que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$  (ver nota 3) ..... 1 ponto
- Indicar a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função  $f\left(\frac{1}{e}\right)$  ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a segunda derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ , em vez de  $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
3. Se for referido que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ , em vez de  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**12.2.** ..... **16 pontos**

Opção (B)

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	<b>1.1.</b>				<b>1.2.</b>				<b>9.1.</b>				<b>9.2.</b>				<b>Subtotal</b>
Cotação (em pontos)	16				20				16				20				<b>72</b>
Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	<b>2.</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>11.1.</b>	<b>11.2.</b>	<b>12.1.</b>	<b>12.2.</b>	<b>Subtotal</b>		
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														<b>128</b>		
<b>TOTAL</b>															<b>200</b>		