REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **5.1.**, **5.2.**, **7.1.** e **7.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\ e^u$

$(a^u)' = u'\ a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{8n-4}{n+1}$

1.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

1.2. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 8[$, definida por $f(x) = \log_2(8-x)$

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

2. Quatro pessoas vão escolher, cada uma e em segredo, um dos seguintes números: 1, 2, 3, 4 e 5

Qual é a probabilidade de exatamente duas delas escolherem o número 5 ?

(A) $0{,}1530$ **(B)** $0{,}1532$ **(C)** $0{,}1534$ **(D)** $0{,}1536$

3. Um saco contém bolas azuis e bolas brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e bolas brancas no saco.

3.1. Retiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «A primeira bola retirada é azul»

B : «A segunda bola retirada é branca»

Sabe-se que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} P(A)$

Justifique que inicialmente existia um número ímpar de bolas azuis no saco.

Sugestão: comece por designar por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

3.2. Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora oito bolas azuis e sete bolas brancas.

Pretende-se colocar todas estas bolas em dez caixas numeradas de 1 a 10, de tal forma que:

- cada caixa com número par tenha, pelo menos, uma bola azul;
- cada caixa com número ímpar tenha, pelo menos, uma bola branca;
- cada caixa tenha, no máximo, duas bolas.

Nestas condições, de quantas maneiras diferentes podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas?

(A) 1176 **(B)** 2520 **(C)** $28\,016$ **(D)** $30\,550$

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

4.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

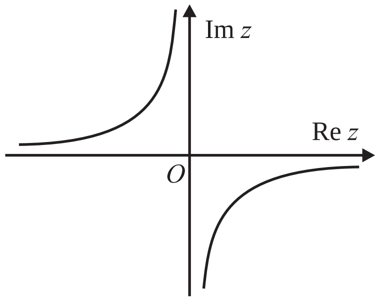
Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

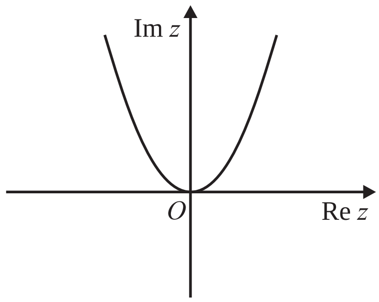
4.2. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $\operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) = 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

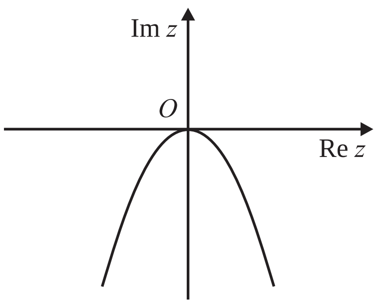
(A)



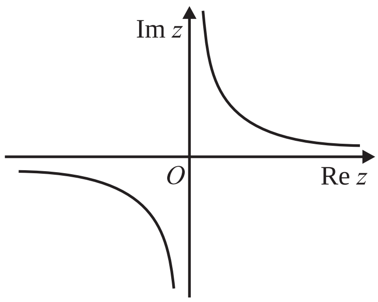
(B)



(C)



(D)



5. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

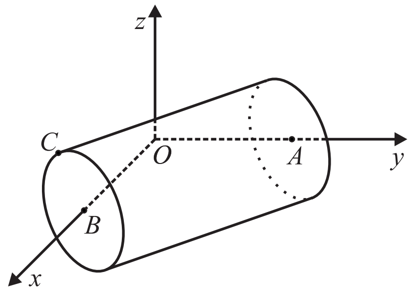


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

5.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

5.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3, 5, 6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

6. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos S, T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$

Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

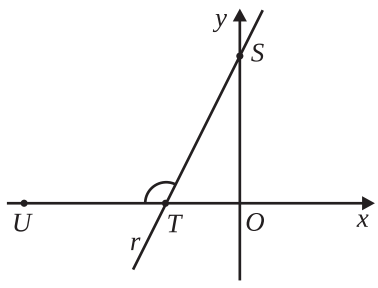


Figura 2

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU?

(A) 4,25 **(B)** 2,68 **(C)** 2,03 **(D)** 1,82

7. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão.

Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

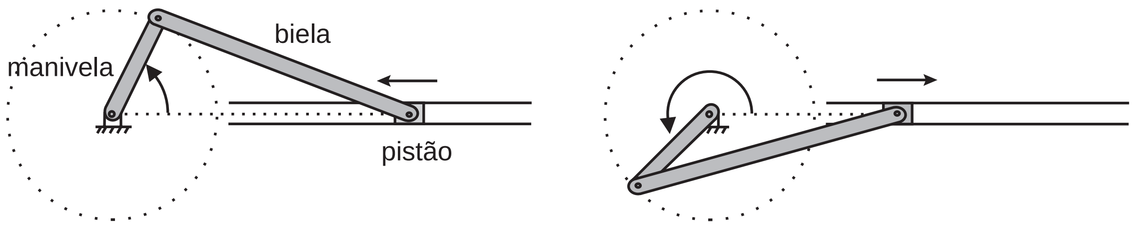


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

Relativamente a esta figura, sabe-se que:

- o ponto P representa o pistão;
- o segmento de reta $[OM]$ representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
- o segmento de reta $[MP]$ representa a biela;
- os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
- os pontos O, A, P e B são colineares.

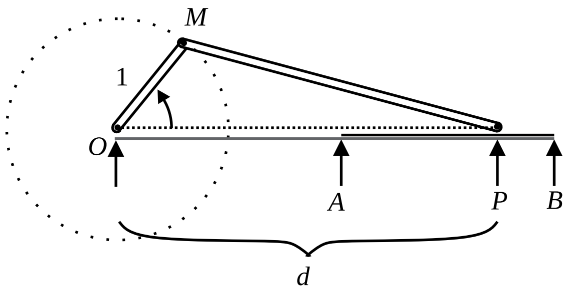


Figura 4

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante.

Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t} \quad , \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

7.1. Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

7.2. Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0, a distância do pistão ao ponto O

Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x=1$, e um ponto A, de ordenada a $(a>1)$, pertencente à reta r

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B

Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?

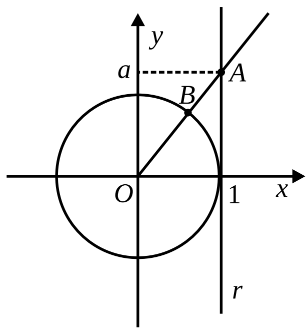


Figura 5

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(B) $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

(D) $\sqrt{a^2-1}$

9. Seja f a função definida em $]-\infty, 2]$ por $f(x)=x+\ln\left(e^x+1\right)$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

9.1. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Determine uma equação dessa assíntota.

9.2. A equação $f(x)=2x+1$ tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k>0$

9.3. Seja h a função definida em $]-\infty, 2]$ por $h(x) = f(x) - x$

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h ?

(A) $e^x - 1$ **(B)** $1 - e^x$ **(C)** $\ln(e^x - 1)$ **(D)** $\ln(1 - e^x)$

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - e^x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

10.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$

10.2. Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	20	16	20	**72**

Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**6.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.**	**10.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	8 x 16 pontos														**128**
TOTAL															**200**

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Critérios de Classificação 9 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

1.º Processo

Obter $u_{n+1} = \dfrac{8n+4}{n+2}$ .... 3 pontos

Obter $u_{n+1} - u_n = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)}$ .... 6 pontos

Referir que $\dfrac{12}{(n+1)(n+2)} > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ .... 5 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente .... 2 pontos

2.º Processo

Obter $u_n = 8 - \dfrac{12}{n+1}$ .... 6 pontos

Justificar que a sucessão de termo geral $-\dfrac{12}{n+1}$ é uma sucessão crescente .. 8 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente .... 2 pontos

3.º Processo

Obter $u_n = 8 - \dfrac{12}{n+1}$ .... 6 pontos

Considerar a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, definida por

$f(x) = 8 - \dfrac{12}{x+1}$ .... 2 pontos

Referir que a função f é crescente em $]-1, +\infty[$ .... 3 pontos

Referir que (u_n) é a restrição a $\mathbb{N}$ da função f .... 3 pontos

Concluir que a sucessão (u_n) é crescente .... 2 pontos

1.2. .... **16 pontos**

Opção **(A)**

2. .... **16 pontos**

Opção **(D)**

3.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco.

1.º Processo

Escrever $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$ .... 3 pontos

Escrever $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$ .... 3 pontos

Escrever $\frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3}$ .... 6 pontos

Obter $a = 2b + 1$ .... 2 pontos

Concluir que a é um número ímpar .... 2 pontos

2.º Processo

Escrever $\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} = \frac{1}{3} \times \frac{a}{a+b}$ .... 7 pontos

Obter $a = 2b + 1$ .... 7 pontos

Concluir que a é um número ímpar .... 2 pontos

3.2. .... **16 pontos**

Opção **(B)**

4.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho > 0$

Identificar z^2 com $\rho^2 e^{i2\theta}$ .... 1 ponto

Identificar $\overline{z}$ com $\rho e^{-i\theta}$ .... 1 ponto

Escrever $\rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}$ .... 1 ponto

Escrever $\rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ .... 2 pontos

Obter o valor de ρ .... 2 pontos

Resolver a equação $2\theta = -\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, em ordem a θ .... 1 ponto

Determinar $|z_1 - z_2|$, sendo z_1 e z_2 duas das soluções não nulas da equação $z^2 = \overline{z}$ .... 5 pontos

Reconhecer que o polígono é um triângulo .... 1 ponto

Obter o perímetro do polígono $(3\sqrt{3})$ .... 2 pontos

2.º Processo

Seja $z = a + bi$, com $(a, b) \neq (0, 0)$

Escrever $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ .... 2 pontos

Escrever $\overline{z} = a - bi$ .... 1 ponto

Escrever $a^2 - b^2 = a \ \wedge \ 2ab = -b$ .... 2 pontos

Resolver a condição $a^2 - b^2 = a \ \wedge \ 2ab = -b$ .... 3 pontos

Determinar $|z_1 - z_2|$, sendo z_1 e z_2 duas das soluções não nulas da equação $z^2 = \overline{z}$ .... 5 pontos

Reconhecer que o polígono é um triângulo .... 1 ponto

Obter o perímetro do polígono $(3\sqrt{3})$ .... 2 pontos

4.2. .... **16 pontos**

Opção **(D)**

5.1. .... **16 pontos**

Determinar as coordenadas do ponto A .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto B .... 2 pontos

Determinar $\overline{AB}$ .... 4 pontos

Escrever $\pi \times \overline{BC}^{\,2} \times \overline{AB} = 10\pi$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de $\overline{BC}$ $(\sqrt{2})$ .... 4 pontos

5.2. .... **20 pontos**

Designemos por r a reta que passa no ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Escrever $(x, y, z) = (3, 5, 6) + k(3, 4, 4),\ k \in \mathbb{R}$ .... 5 pontos

Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta r, em função de k ... 3 pontos

Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano ABC pelas coordenadas de um ponto genérico da reta r .... 4 pontos

Obter o valor de k .... 3 pontos

Obter as coordenadas do ponto pedido $((0, 1, 2))$ .... 5 pontos

6. .... **16 pontos**

Opção **(C)**

7.1. .... **16 pontos**

Opção **(B)**

7.2. .... **20 pontos**

Apresentar a equação

$\cos(t+2)+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2(t+2)}=0{,}75\left(\cos t+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 t}\right)$ (ou uma equação equivalente) (**ver nota 1**) .... 6 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota 2**) .... 5 pontos

Apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) .... 4 pontos

Apresentar o valor pedido $(2{,}8)$ .... 5 pontos

Notas:

1. Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

8. .... **16 pontos**

Opção **(A)**

9.1. .... **16 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ .... 8 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\ln(e^x+1)}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\ln(e^x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ .... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\ln(e^x+1)-x)$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ .... 4 pontos

Concluir que a equação da assíntota é $y=x$ .... 2 pontos

2.º Processo

Referir que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(e^{x}+1\right)\right)=0$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ .... 7 pontos

Concluir que a equação da assíntota é $y=x$ .... 2 pontos

9.2. .... **16 pontos**

Escrever $x+\ln\left(e^{x}+1\right)=2x+1$ .... 1 ponto

Obter $e^{x}+1=e^{x+1}$ .... 4 pontos

Obter $e^{x}=\dfrac{1}{e-1}$ .... 5 pontos

Obter $x=\ln\left(\dfrac{1}{e-1}\right)$ .... 2 pontos

Obter $x=-\ln\left(e-1\right)$ .... 4 pontos

9.3. .... **16 pontos**

Opção **(C)**

10.1. .... **16 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^{-}} g(x)$ .... 7 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^{-}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^{x}}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^{x}}\right)=1+\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^{x}}$ .... 1 ponto

Escrever $1+\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^{x}}=1+\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x}{1-e^{x}}$ ... 2 pontos

Escrever $1+\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x}{1-e^{x}}=1-\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x}{e^{x}-1}$ .. 1 ponto

Escrever $1-\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x}{e^{x}-1}=1-\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}-1}{x}}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^{-}} g(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)$ .... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(x^{2}\ln x\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(x^{2}\ln x\right)\underset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{y^{2}}\ln\dfrac{1}{y}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{y^{2}}\ln\dfrac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{-\ln y}{y^{2}}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{-\ln y}{y^{2}}=-\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}\times\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)=0$ .... 1 ponto

Referir que $g(0)=0$ .... 2 pontos

Concluir que a função g é contínua no ponto 0 .... 1 ponto

10.2. .... **16 pontos**

Determinar $g'(x)$ em $]0,+\infty[$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Escrever $g'(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar o zero de g' em $]0,+\infty[$ .... 2 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g' e de monotonia de g em $]0,+\infty[$ (ou equivalente) .... 5 pontos

Apresentar os intervalos de monotonia da função (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Obter $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ .... 3 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

2. Se for referido que a função g é decrescente em $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$, em vez de $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, e crescente em $\left]\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$, em vez de $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">5.1.</td><td colspan="4">5.2.</td><td colspan="3">7.1.</td><td colspan="3">7.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>6.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>9.3.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="15">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>