REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1
7 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > \mu - 2\sigma)$?

(A) $0{,}926$ **(B)** $0{,}982$ **(C)** $0{,}977$ **(D)** $0{,}943$

PMC2015

1.2. Na Figura 1, está representado um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$
- $B\hat{A}C = 57°$
- $A\hat{B}C = 81°$

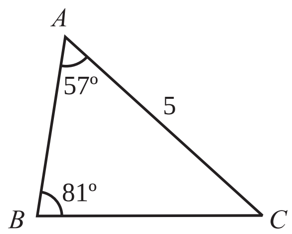

Figura 1

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas ?

(A) $3{,}31$ **(B)** $3{,}35$ **(C)** $3{,}39$ **(D)** $3{,}43$

2. Num clube desportivo, praticam-se as modalidades de basquetebol e futebol, entre outras.

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar basquetebol é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de ele praticar futebol é $\frac{2}{5}$

Sabe-se ainda que, dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol.

Mostre que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.

3.1. Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

3.2. Escolhe-se, ao acaso, um código de entre todos os códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres.

Determine a probabilidade de esse código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10$$

4.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(4, 1, -2),\ k \in \mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

4.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 2, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

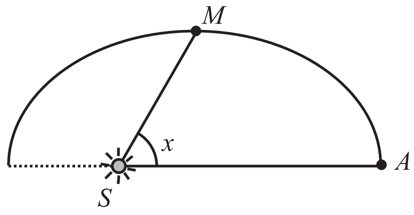

Figura 2

Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d = \frac{555}{10 - 2{,}06 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

– apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

6. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - \operatorname{tg} x$

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) $0{,}84$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}92$ **(D)** $0{,}96$

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174

Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n)

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

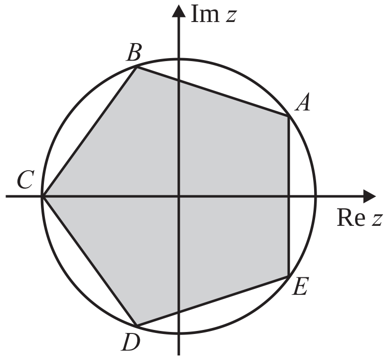

Figura 3

Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.

Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8		12	8	12	12	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Critérios de Classificação 12 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de resposta restrita, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada», «recorrendo à calculadora gráfica»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Caderno 1

1.1. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

1.2. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

2. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos.

1.º Processo

Seja B o acontecimento «o atleta escolhido pratica basquetebol», e seja F o acontecimento «o atleta escolhido pratica futebol».

Escrever $P(B)=\frac{1}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(F)=\frac{2}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{B}|\overline{F})=\frac{3}{4}$ .... 2 pontos

Escrever $P(\overline{B}|\overline{F})=\frac{P(\overline{B}\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}$ .... 1 ponto

Determinar $P(\overline{B}\cap\overline{F})$ .... 2 pontos

Determinar $P(B\cup F)$ .... 2 pontos

Determinar $P(B\cap F)$ .... 2 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B\cap F)\neq 0,$ conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) .... 1 ponto

2.º Processo

Seja B o acontecimento «o atleta escolhido pratica basquetebol», e seja F o acontecimento «o atleta escolhido pratica futebol».

Escrever $P(B)=\frac{1}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(F)=\frac{2}{5}$ .... 1 ponto

Escrever $P(\overline{B}|\overline{F})=\frac{3}{4}$ .... 2 pontos

Obter $P(B|\overline{F})=\frac{1}{4}$ .... 1 ponto

Escrever $P\left(B|\overline{F}\right)=\dfrac{P\left(B\cap\overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)}$ .... 1 ponto

Determinar $P\left(B\cap\overline{F}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $P(B\cap F)$ .... 3 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F)\neq 0,$ conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) .... 1 ponto

3.º Processo

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «pratica basquetebol, não pratica basquetebol» e «pratica futebol, não pratica futebol» .... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{1}{5}$ dos atletas pratica basquetebol» .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à informação «$\frac{2}{5}$ dos atletas praticam futebol» .... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa à probabilidade de um atleta não praticar futebol .... 1 ponto

Utilizar a informação «dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol» para determinar a probabilidade de o atleta não praticar basquetebol nem futebol, e escrever o valor obtido na célula respetiva ... 3 pontos

Preencher as restantes células que permitem resolver o problema .... 2 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F)\neq 0,$ conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) .... 1 ponto

4.º Processo

Construir um diagrama em árvore de cuja raiz saem os ramos «pratica futebol» e «não pratica futebol» e, de cada um destes, saem dois novos ramos, «pratica basquetebol» e «não pratica basquetebol» .... 1 ponto

Escrever $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$ nos respetivos ramos .... 2 pontos

Escrever $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ nos respetivos ramos .... 3 pontos

Calcular a probabilidade de um atleta não praticar futebol, mas praticar basquetebol

OU

Calcular a probabilidade de um atleta não praticar futebol nem basquetebol .... 2 pontos

Calcular a probabilidade de um atleta praticar futebol e praticar basquetebol ...... 3 pontos

Justificar o pretendido (Como $P(B \cap F)\neq 0,$ conclui-se que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades) (**ver nota**) .... 1 ponto

Nota – Se o valor obtido para $P(B\cap F)$ não pertencer ao intervalo $]0,1],$ a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

3.2. .... **12 pontos**

Apresentar o número de casos possíveis: ${}^{14}A'_4$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis: ${}^{5}A_4$ (**ver nota 1**) .... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) $(0{,}003)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a esta expressão, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
2. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0,1]$

4.1. .... **12 pontos**

Determinar a cota do ponto P .... 4 pontos

Escrever $4x+y-2z+d=0$ .... 4 pontos

Obter o valor de d .... 3 pontos

Escrever uma equação do plano pedido
$(4x+y-2z-15=0$ ou equivalente$)$ .... 1 ponto

4.2. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$ .... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OC}$ .... 1 ponto

Calcular $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ .... 3 pontos

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OA}$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{OC}$ .... 1 ponto

Escrever a equação $4=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos A\hat{O}C$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter a amplitude do ângulo AOC (48°) .... 2 pontos

2.º Processo

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre o plano xOy

Determinar $\overline{OA'}$ .... 4 pontos

Escrever $\operatorname{tg}(A\hat{O}A') = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .... 4 pontos

Obter a amplitude do ângulo AOA' .... 2 pontos

Obter a amplitude do ângulo $AOC\ (48°)$ .... 3 pontos

5. .... **12 pontos**

Equacionar o problema $\left(d(3\alpha) = 0{,}97 \times d(\alpha)\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 5 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver nota**) .... 4 pontos

Apresentar o valor de $\alpha\ (10°)$ .... 3 pontos

Nota – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

7. .... **12 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12$ .... 1 ponto

Escrever $174 = \frac{4 - 2r + 4 + 9r}{2} \times 12$, sendo r a razão da progressão .... 4 pontos

Obter o valor de r .... 2 pontos

Obter $3n - 5 = 5371$ .... 2 pontos

Obter o valor de n .... 2 pontos

Concluir que 5371 é termo da sucessão .... 1 ponto

2.º Processo

Escrever $4 = u_1 + 2r \ \wedge\ 174 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12$ .... 4 pontos

Obter o valor de r .... 2 pontos

Obter o valor de u_1 .... 1 ponto

Escrever $3n - 5 = 5371$ .... 2 pontos

Obter o valor de n .... 2 pontos

Concluir que 5371 é termo da sucessão .... 1 ponto

8. .... **8 pontos**

Opção **(A)**

Caderno 2

9.1. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

9.2. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

10. .... **12 pontos**

Escrever $(2-i)^2 = 4-4i-1$ .... 2 pontos

Identificar i^{15} com $-i$ .... 1 ponto

Obter $z = \frac{4-3i}{1-2i} - 3i$ .... 1 ponto

Obter $z = 2-2i$ .... 3 pontos

Escrever $-\frac{1}{2}\bar{z}$ na forma trigonométrica .... 5 pontos

Escrever $\bar{z}$ na forma $x+yi$ .... 1 ponto

Obter $-\frac{1}{2}\times\bar{z}$ na forma $x+yi$ .... 1 ponto

Escrever $-\frac{1}{2}\times\bar{z}$ na forma trigonométrica

$\left(\text{por exemplo, } \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4} \text{ ou } \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$ .... 3 pontos

OU

Escrever z na forma trigonométrica .... 2 pontos

Escrever $\bar{z}$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Escrever $-\frac{1}{2}\times\bar{z}$ na forma trigonométrica

$\left(\text{por exemplo, } \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4} \text{ ou } \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$ .... 2 pontos

11. .... **8 pontos**

Opção **(B)**

12.1. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

12.2. .... **8 pontos**

Opção **(D)**

13. .... **13 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever a condição $x+1>0 \wedge 8-x>0$ .... 1 ponto

Concluir que $x \in \left]-1,8\right[$ .... 1 ponto

Escrever $\log_2(x+1)+\log_2(8-x)\leq 3$ .... 1 ponto

Escrever $\log_2\left((x+1)(8-x)\right)\leq 3$ .... 2 pontos

Escrever $(x+1)(8-x)\leq 8$ .... 2 pontos

Obter $-x^2+7x\leq 0$ .... 1 ponto

Resolver a condição $-x^2+7x\leq 0$ .... 2 pontos

Apresentar a resposta na forma pedida $\left(\left]-1,0\right]\cup\left[7,8\right[\right)$ .... 3 pontos

2.º Processo

Escrever a condição $x+1>0 \wedge 8-x>0$ .... 1 ponto

Concluir que $x \in \left]-1,8\right[$ .... 1 ponto

Escrever $\log_2(x+1)\leq \log_2 8-\log_2(8-x)$ .... 2 pontos

Escrever $\log_2(x+1)\leq \log_2\dfrac{8}{8-x}$ .... 2 pontos

Escrever $x+1\leq\dfrac{8}{8-x}$ .... 1 ponto

Resolver a condição $x+1\leq\dfrac{8}{8-x}$ .... 3 pontos

Apresentar a resposta na forma pedida $\left(\left]-1,0\right]\cup\left[7,8\right[\right)$ .... 3 pontos

14.1. .... **13 pontos**

Escrever $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-4}{x}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\dfrac{e^x}{1-x}-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x}{x(1-x)}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+x}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}+1}{1-x}$ .... 5 pontos

Obter $f'(0)=2$ .... 2 pontos

14.2. .... **13 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \dfrac{e^x}{1-x}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \dfrac{e^x}{1-x}\right) = 3 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-x} = 0$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ .... 1 ponto

Concluir que a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x \to -\infty$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .... 6 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2) + 2}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2) + 2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 \ln x + 2}{x}$ .... 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 \ln x + 2}{x} = 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f, quando $x \to +\infty$ .... 1 ponto

14.3. .... **8 pontos**

Opção **(C)**

15. .... **12 pontos**

Determinar $g'(x)$ .... 1 ponto

Determinar $g''(x)$ .... 2 pontos

Determinar os zeros de g'' em $[0, \pi]$ .... 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de monotonia de g' (ou equivalente) 3 pontos

Determinar $g'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .... 3 pontos

COTAÇÕES

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8		12	8	12	12	13	12	8	12	8	**105**
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.**	**14.1.**	**14.2.**	**14.3.**	**15.**	
8		12	8	8		13	13	13	8	12	**95**
TOTAL											**200**