

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 735/2.ª Fase**

14 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2016**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

---

**Página em branco**

---

---

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
  - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
  - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

---

**Página em branco**

---

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

**Losango:**  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

**Trapézio:**  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

**Polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$  ( $\alpha$  – amplitude, em graus, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Área lateral de um cilindro reto:**  $2 \pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

## Volumes

**Pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

**Cilindro:**  $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

• **Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Probabilidades e Estatística

Se  $X$  é uma variável aleatória discreta de valores  $x_i$  com probabilidade  $p_i$ , então:

• **Valor médio de  $X$ :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de  $X$ :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é uma variável aleatória normal de valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

## GRUPO I

Uma empresa vinícola produziu vinho de elevada qualidade: 1280 garrafas de vinho tinto, 900 de vinho branco e 1050 de vinho rosé.

A empresa pretende vender essa produção a retalhistas em dois tipos de lotes:

- Lote I, a 1500 euros, com 160 garrafas de vinho tinto, 100 de vinho branco e 50 de vinho rosé;
- Lote II, a 1800 euros, com 80 garrafas de vinho tinto, 100 de vinho branco e 150 de vinho rosé.

Será possível a empresa obter uma receita de 15 500 euros com a venda de lotes dos dois tipos?

Na sua resposta, designe por  $x$  e por  $y$ , respetivamente, o número de lotes I e o número de lotes II que a empresa pode vender, e apresente:

- as restrições do problema;
- uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;
- o valor máximo de receita que a empresa pode obter com a venda de lotes dos dois tipos.

## GRUPO II

O estudo dos surtos de gripe é essencial em Saúde Pública.

1. Habitualmente, um surto de gripe faz aumentar a procura dos serviços prestadores de cuidados de saúde.

1.1. Na tabela seguinte, apresentam-se os registos do número,  $x$ , de pessoas infetadas por vírus de gripe, e do respetivo número,  $y$ , de hospitalizações associadas a gripe, em diferentes momentos, numa certa região.

<b>Número de pessoas infetadas (<math>x</math>)</b>	31	857	11 973	12 000	86 000	86 123	320 083	616 545
<b>Número de hospitalizações (<math>y</math>)</b>	6	117	1000	1100	5426	6000	13 848	18 339

Considere um modelo de regressão linear obtido a partir dos registos apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de hospitalizações associadas a gripe, nessa região, caso sejam registados 250 000 infetados por vírus de gripe.

Na sua resposta, apresente os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de  $y$  sobre  $x$ , com quatro casas decimais.

Apresente o resultado final arredondado às unidades de milhar.

- 1.2. Admita que, numa determinada unidade de saúde, o tempo de espera, em minutos, por uma consulta de urgência é bem modelado por uma distribuição normal de valor médio 25 minutos.

A Maria dirige-se a essa unidade de saúde para uma consulta de urgência.

- 1.2.1. Indique a probabilidade de a Maria ter de esperar, pelo menos, 25 minutos pela consulta de urgência.

- 1.2.2. É mais provável a Maria ter de esperar menos de 15 minutos pela consulta de urgência, ou ter de esperar mais de 30 minutos por essa consulta?

Justifique a sua resposta.

2. As pandemias de gripe são epidemias que ocorrem com intervalos irregulares, habitualmente, de várias décadas.

Admita que, durante uma pandemia de gripe, a percentagem de casos de gripe,  $x$  dias após o início da pandemia, é dada, aproximadamente, por

$$f(x) = 4,75 \times e^{-0,007(x-42)^2}, \text{ para } x \in [0, 84]$$

- 2.1. Qual foi, aproximadamente, a percentagem de casos de gripe no instante em que se completaram três **semanas** após o início da pandemia?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

- 2.2. Admita que as autoridades de saúde, no âmbito do plano de contingência para esta pandemia de gripe, mantiveram ativa uma determinada medida nos dias em que a percentagem de casos de gripe foi superior a 1%

Durante quantas semanas completas esteve ativa essa medida?

Resolva o problema recorrendo às potencialidades gráficas da sua calculadora.

### GRUPO III

A água é uma substância química e um recurso natural essencial à vida na Terra.

1. Durante muito tempo, o regadio dos terrenos agrícolas foi auxiliado pelas rodas de água ou noras de corrente. As noras caíram em desuso, mas ainda existem algumas a funcionar nos dias de hoje.

A Figura 1 é uma fotografia de uma dessas noras.

A água que passa sob a nora empurra as suas pás, fazendo-a rodar.

Admita que:

- num determinado dia, a nora esteve a rodar com velocidade constante durante dez minutos e que, no dia seguinte, voltou a rodar durante dez minutos, também com velocidade constante, embora superior à do dia anterior;
- em ambos os dias, o nível da água se manteve constante e que uma determinada pá se encontrava na mesma posição, no instante em que a roda começou a rodar em sentido positivo.



Figura 1

Considere a altura dessa pá em relação ao nível da água, em metros, e considere o tempo após a nora ter começado a rodar, em segundos.

A Figura 2 é um esquema da situação, no qual:

- a circunferência representa a nora;
- o ponto  $P$  representa a posição inicial da pá;
- o ponteadado representa o nível da água.

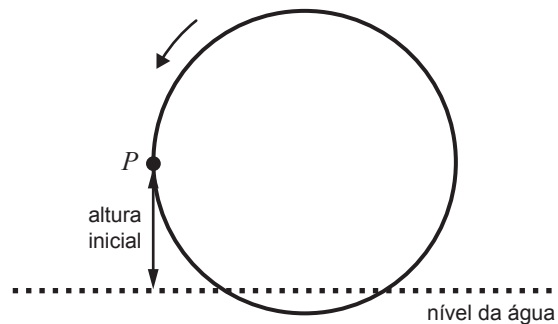


Figura 2



- 1.1. Relativamente ao primeiro dia, admita que a altura da pá,  $h_1$ ,  $t$  segundos após a nora ter começado a rodar, é dada, durante os dez minutos em que a nora rodou, por

$$h_1(t) = 2,1 - 2,5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} t\right) \quad , \text{ com } t \in [0, 600]$$

O argumento da função seno está em radianos.

1.1.1. Determine o diâmetro da nora.

1.1.2. Quantas voltas completas foram dadas pela pá durante o intervalo de tempo em que a nora rodou?

Justifique a sua resposta.

- 1.2. Designemos por  $h_2$  a altura da pá  $t$  segundos após a nora ter começado a rodar no segundo dia.

Sabe-se que a função  $H$ , que dá, em metros por segundo, a taxa de variação instantânea da função  $h_2$ , para cada valor de  $t$ , é definida por

$$H(t) = -\frac{5\pi}{14} \cos\left(\frac{\pi}{7} t\right) \quad , \text{ com } t \in [0, 600]$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Determine ao fim de quantos segundos a altura da pá foi máxima pela primeira vez, após a nora ter começado a rodar no segundo dia.

2. Numa aula de Química, um grupo de alunos realizou uma experiência com o objetivo de estudar a temperatura de ebulição da água.

A experiência consistiu em aquecer água num recipiente e registar, ao longo de algum tempo, a temperatura da água. Durante a experiência, a temperatura ambiente da sala manteve-se igual a  $21^{\circ}\text{C}$

Às 14h 50min, colocou-se o recipiente com água a aquecer. Algum tempo depois, o processo de aquecimento foi interrompido devido a uma falha elétrica. A partir desse instante, a água começou a arrefecer e, com o passar do tempo, a sua temperatura foi-se aproximando da temperatura ambiente da sala.

Seja  $x$  o tempo, em minutos, decorrido após as 14h 50min, e seja  $f$  a função que a cada instante  $x$  faz corresponder o valor da temperatura, em  $^{\circ}\text{C}$ , da água no recipiente.

Sabe-se que:

- a temperatura da água no recipiente, no instante em que se colocou a aquecer, era inferior à temperatura ambiente da sala;
- a falha elétrica ocorreu às 15 horas;
- a taxa média de variação da função  $f$  no intervalo  $[5, 40]$  é positiva.

Nas Figuras 3, 4 e 5, estão representados três gráficos e as respectivas assíntotas horizontais, de equação  $y = 21$

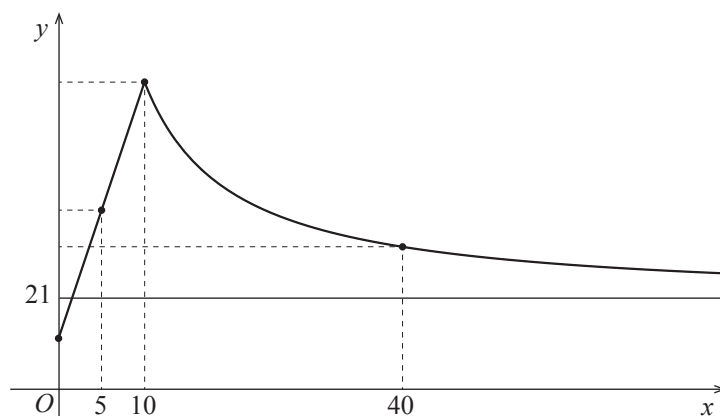


Figura 3

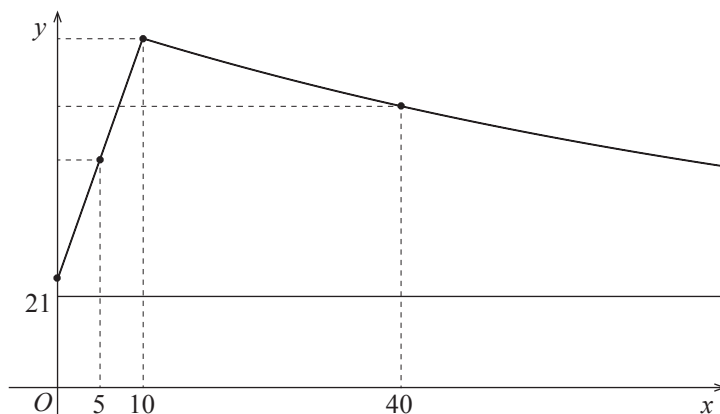


Figura 4

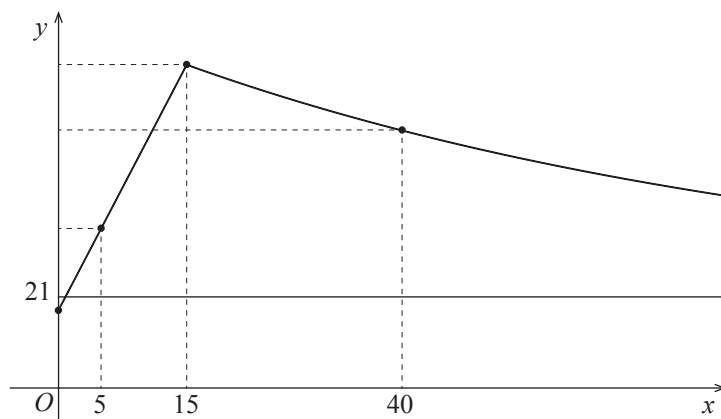


Figura 5

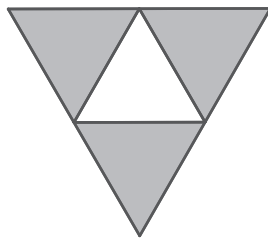
Apresente, num pequeno texto, para cada uma das Figuras, 3, 4 e 5, uma razão pela qual o gráfico representado **não** pode ser o gráfico da função  $f$

## GRUPO IV

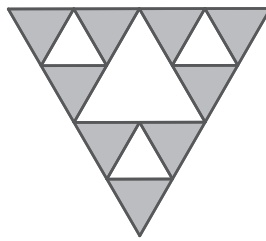
Na Figura 6, apresentam-se as três primeiras etapas da construção de um Tapete de Sierpinski, feita a partir de um triângulo equilátero inicial.

Tal como a figura sugere, nesta construção:

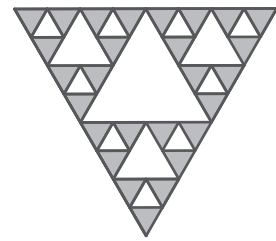
- na *etapa 1*, marcam-se os pontos médios dos lados do triângulo inicial e retira-se o triângulo com vértices nesses pontos médios, obtendo-se três triângulos;
- na *etapa 2*, marcam-se os pontos médios dos lados dos triângulos obtidos na etapa anterior e retiram-se os triângulos com vértices nesses pontos médios, obtendo-se nove triângulos;
- e assim sucessivamente.



*etapa 1*



*etapa 2*



*etapa 3*

Figura 6

1. Quantos triângulos são obtidos na *etapa 16* desta construção?

Justifique a sua resposta.

2. A sucessão das somas das áreas dos triângulos obtidos em cada etapa da construção é uma progressão geométrica.

Determine a razão dessa progressão.

**Sugestão:** Na sua resolução, considere que a área do triângulo inicial é 1

3. Num mural, com forma de paralelogramo, foram pintados triângulos equiláteros iguais aos da *etapa 1* da construção do Tapete de Sierpinski (os triângulos pintados a branco representam aquele que foi retirado naquela etapa).

Tal como ilustra a Figura 7, que não está à escala:

- os triângulos vão ocupar toda a superfície do mural, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre eles;
- o triângulo inicial tem 1 dm de lado;
- os lados do paralelogramo medem 20 dm e 10 dm

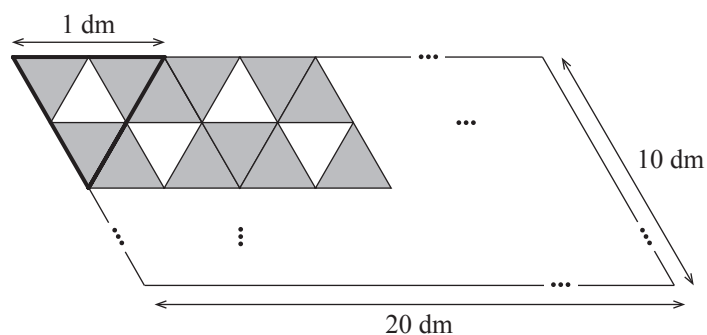


Figura 7

Determine a área do mural ocupada pelos triângulos pintados a branco.

Apresente o resultado em decímetros quadrados, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4. Na Figura 8, estão representadas as planificações de duas pirâmides triangulares regulares. As planificações não estão desenhadas à escala.

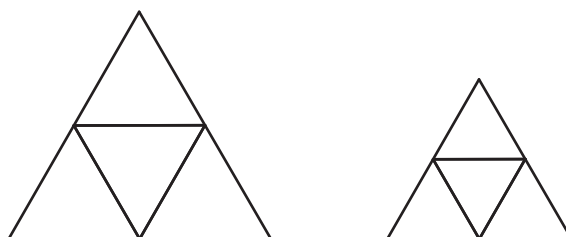


Figura 8

Sabe-se que a pirâmide de menores dimensões tem 10 cm de aresta e que a razão entre os volumes das duas pirâmides é  $\frac{1}{64}$ .

Determine a soma dos comprimentos das arestas da pirâmide de maiores dimensões.

**FIM**

## COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	Item único					30
II	1.1.	1.2.1.	1.2.2.	2.1.	2.2.	55
	15	5	10	10	15	
III	1.1.1.	1.1.2.	1.2.	2.	60	
	15	15	10	20		
IV	1.	2.	3.	4.	55	
	10	15	20	10		
<b>TOTAL</b>						<b>200</b>

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

**Prova 735**

**2.<sup>a</sup> Fase**



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 735/2.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

12 Páginas

---

**2016**

VERSÃO DE TRABALHO

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:  – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;  – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

30 pontos

Indicar as restrições (**ver nota 1**) ..... 11 pontos

$160x + 80y \leq 1280$  (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) ..... 3 pontos

$100x + 100y \leq 900$  (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) ..... 3 pontos

$50x + 150y \leq 1050$  (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) ..... 3 pontos

$x \geq 0$  ..... 1 ponto

$y \geq 0$  ..... 1 ponto

Representar graficamente a região admissível ..... 6 pontos

Representar graficamente a reta de equação  
 $160x + 80y = 1280$  ..... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação  
 $100x + 100y = 900$  ..... 1 ponto

Representar graficamente a reta de equação  
 $50x + 150y = 1050$  ..... 1 ponto

Assinalar o polígono ..... 3 pontos

Calcular o valor máximo de receita que a empresa pode obter com a venda de lotes dos dois tipos ..... 12 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados  $(3, 6)$  e  $(7, 2)$  ..... (2 + 2) ..... 4 pontos

Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem  $(8, 0)$  e  $(0, 7)$  ..... (1 + 1) ..... 2 pontos

Identificar os valores de receita com  $1500x + 1800y$  ..... 1 ponto

Calcular o valor de receita correspondente a cada um dos vértices do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) (**ver nota 4**) ..... (1 x 4) ..... 4 pontos

Indicar o valor máximo (15 300 euros) ..... 1 ponto

Concluir que não é possível a empresa obter uma receita de 15 500 euros com a venda de lotes dos dois tipos ..... 1 ponto

### Notas:

1. Se, em alguma das restrições, for utilizado incorretamente o símbolo «<», em vez do símbolo «≤», ou o símbolo «>», em vez do símbolo «≥», a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto, no total.
2. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «=», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «≥», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 2 pontos.
4. No caso de ser implementado o método da paralela à reta de nível zero e se apenas for representada, corretamente, esta reta, a pontuação a atribuir a este passo é 2 pontos.

## GRUPO II

1.1. .... 15 pontos

- Apresentar as listas introduzidas na calculadora ..... 1 ponto
- Apresentar o declive da reta de regressão (0,0304) ..... 4 pontos
- Apresentar a ordenada na origem da reta de regressão (1418,9582) ..... 4 pontos
- Obter a estimativa ..... 5 pontos
- Apresentar o valor pedido (9 milhares) ..... 1 ponto

1.2.1. .... 5 pontos

- 0,5 (ou equivalente) ..... 5 pontos

1.2.2. .... 10 pontos

- Referir que  $25 - 15 > 30 - 25$  (ver nota 1) ..... 3 pontos
- Referir que a área limitada pelo eixo das abcissas e pela curva de Gauss à esquerda de 15 é menor do que a área limitada pelo eixo das abcissas e pela curva de Gauss à direita de 30 (ver nota 2) ..... 5 pontos
- Concluir que é mais provável a Maria ter de esperar mais do que 30 minutos pela consulta de urgência ..... 2 pontos

### Notas:

1. Em alternativa, pode ser apresentado um esboço da curva de Gauss com o valor médio e os pontos de abcissas 15 e 30 corretamente assinalados.
2. Em alternativa, pode ser assinalada a região entre o eixo das abcissas e a curva de Gauss à esquerda de 15 e assinalada a região entre o eixo das abcissas e a curva de Gauss à direita de 30.

2.1. .... 10 pontos

- Identificar o instante em que se completaram três semanas após o início da pandemia com  $x = 21$  ..... 3 pontos
- Identificar o valor pedido com  $f(21)$  ..... 3 pontos
- Obter o valor pedido (0,2%) ..... 4 pontos

**2.2.** ..... **15 pontos**

- Traduzir o problema pela condição  $f(x) > 1$  (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Representar graficamente a função  $f$  ..... 4 pontos
  - Respeitar o domínio ..... 2 pontos
  - Respeitar a forma ..... 2 pontos
- Representar graficamente a reta de equação  $y = 1$  ..... 1 ponto
- Assinalar os pontos de intersecção dos gráficos ..... 1 ponto
- Obter as abcissas desses pontos (27,0... e 56,9...) ..... (2 + 2) ..... 4 pontos
- Obter a diferença dessas abcissas ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (4 semanas) ..... 2 pontos

**Nota** – Se, em vez de ser traduzido o problema, for apresentada alguma das condições  $f(x) \geq 1$ ,  $f(x) \leq 1$ ,  $f(x) < 1$  ou  $f(x) = 1$ , a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

**GRUPO III**

**1.1.1.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Representar graficamente a função  $h_1$  ..... 4 pontos
  - Utilizar um intervalo do domínio que permita a resolução do problema ..... 2 pontos
  - Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
- Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada é o valor máximo absoluto da função  $h_1$  ..... 2 pontos
- Obter esse valor máximo (4,6) ..... 2 pontos
- Assinalar um ponto do gráfico cuja ordenada é o valor mínimo absoluto da função  $h_1$  ..... 2 pontos
- Obter esse valor mínimo (-0,4) ..... 2 pontos
- Obter o valor pedido (5 m) ..... 3 pontos

**2.º Processo**

Escrever $0 \leq t \leq 600$ .....	1 ponto
Escrever $0 \leq \frac{\pi}{10}t \leq 60\pi$ .....	1 ponto
Escrever $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 1$ .....	3 pontos
Escrever $-2,5 \leq 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 2,5$ .....	2 pontos
Escrever $-2,5 \leq -2,5 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 2,5$ .....	1 ponto
Escrever $-2,5 + 2,1 \leq -2,5 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 2,1 \leq 2,5 + 2,1$ .....	2 pontos
Obter $-0,4 \leq -2,5 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 2,1 \leq 4,6$ .....	2 pontos
Obter o valor pedido (5 m) .....	3 pontos

**1.1.2.** ..... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Determinar o tempo que a nora demora a dar uma volta completa .....	12 pontos
Representar graficamente a função $h_1$ .....	4 pontos
Utilizar um intervalo do domínio que permita a resolução do problema .....	2 pontos
Respeitar a forma do gráfico .....	2 pontos
Assinalar dois pontos do gráfico relevantes para a resolução do problema .....	2 pontos
Obter as abcissas desses pontos ..... (2 + 2) .....	4 pontos
Obter o tempo de uma volta completa (20 segundos) .....	2 pontos
Obter o número de voltas pedido (30) .....	3 pontos

**2.º Processo**

Referir que o período positivo mínimo da função $h_1$ é dado por $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}$ .....	9 pontos
Obter o valor desse período (20) .....	3 pontos
Obter o número de voltas pedido (30) .....	3 pontos



**1.2. .... 10 pontos**

- Representar graficamente a função  $H$  ..... 4 pontos
  - Utilizar um intervalo do domínio que permita a resolução do problema ..... 2 pontos
  - Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
- Identificar o valor pedido com o segundo zero da função  $H$  ..... 3 pontos
- Assinalar o ponto do gráfico correspondente a esse zero ..... 1 ponto
- Apresentar o valor pedido (10,5 segundos) ..... 2 pontos

**2. .... 20 pontos**

Tópicos de resposta:

- no gráfico representado na Figura 3, a taxa média de variação da respetiva função no intervalo  $[5, 40]$  é negativa, pois a imagem de 40 é inferior à imagem de 5
- no gráfico representado na Figura 4, a imagem de zero pela respetiva função é superior a 21
- no gráfico representado na Figura 5, 10 não é maximizante da respetiva função.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
4	Apresenta os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
3	Apresenta os três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas dois dos três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
2	Apresenta apenas dois dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas um dos três tópicos, de forma clara e com vocabulário específico adequado.	8
1	Apresenta apenas um dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na utilização do vocabulário específico.	2

## GRUPO IV

1. .... 10 pontos

- Referir que em cada etapa da construção, a partir da segunda, o número de triângulos obtidos é o triplo do número de triângulos obtidos na etapa imediatamente anterior (ou equivalente) ..... 5 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $3^{16}$  ou equivalente) ..... 5 pontos

2. .... 15 pontos

- Obter a soma das áreas dos triângulos obtidos na *etapa 1* ( $\frac{3}{4}$ ) ..... 5 pontos
- Obter a soma das áreas dos triângulos obtidos na *etapa 2* ( $\frac{9}{16}$ ) ..... 5 pontos
- Escrever uma expressão que permita obter a razão da progressão geométrica ..... 3 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $\frac{3}{4}$ ) ..... 2 pontos

3. .... 20 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

- Referir que a altura do paralelogramo relativa ao lado maior é dez vezes a altura do triângulo inicial (**ver nota**) ..... 4 pontos
- Calcular a altura,  $h$ , do triângulo inicial ..... 5 pontos
- Escrever  $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter  $h^2 = \frac{3}{4}$  ..... 2 pontos
- Obter  $h = 0,86602...$  ..... 1 ponto
- Obter a altura do paralelogramo relativa ao lado maior (**ver nota**) ..... 2 pontos
- Obter a área do paralelogramo ..... 3 pontos
- Identificar a área pedida com  $\frac{1}{4}$  da área do paralelogramo ..... 4 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $43,3 \text{ dm}^2$ ) ..... 2 pontos

**Nota** – Em alternativa, pode ser referido que a altura do paralelogramo relativa ao lado menor é vinte vezes a altura do triângulo inicial e ser calculada essa altura.

## 2.º Processo

- Calcular a altura,  $h$ , do triângulo inicial ..... 5 pontos
- Escrever  $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$  (ou equivalente)..... 2 pontos
- Obter  $h^2 = \frac{3}{4}$  ..... 2 pontos
- Obter  $h = 0,86602...$  ..... 1 ponto
- Obter a área do triângulo inicial ..... 3 pontos
- Identificar a área de um triângulo pintado a branco com  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo inicial ..... 3 pontos
- Obter essa área ..... 1 ponto
- Calcular o número de triângulos pintados a branco no paralelogramo (400) ..... 4 pontos
- Escrever uma expressão para a área pedida ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $43,3 \text{ dm}^2$ ) ..... 2 pontos

## 4. .... 10 pontos

- Obter a razão de semelhança  $\left(\frac{1}{4}\right)$  ..... 4 pontos
- Calcular a soma dos comprimentos das arestas da pirâmide de maiores dimensões ..... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

- Escrever uma expressão do comprimento da aresta da pirâmide de maiores dimensões ..... 3 pontos
- Obter o comprimento dessa aresta (40) ..... 1 ponto
- Identificar o número de arestas da pirâmide (6) ..... 1 ponto
- Obter o valor pedido (240 cm) ..... 1 ponto

### 2.º Processo

- Identificar o número de arestas da pirâmide (6) ..... 1 ponto
- Obter a soma dos comprimentos da aresta da pirâmide de menores dimensões (60) ..... 1 ponto
- Escrever uma expressão da soma dos comprimentos da aresta da pirâmide de maiores dimensões ..... 3 pontos
- Obter o valor pedido (240 cm) ..... 1 ponto

## COTAÇÕES

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	Item único					30
II	1.1.	1.2.1.	1.2.2.	2.1.	2.2.	
	15	5	10	10	15	55
III	1.1.1.	1.1.2.	1.2.	2.		
	15	15	10	20		60
IV	1.	2.	3.	4.		
	10	15	20	10		55
<b>TOTAL</b>						<b>200</b>